Combien de configurations a mon casse-tête?

Résultat d'apprentissage	Mathématiques 30-1, Permutations, combinaisons, binôme de Newton (théorème du binôme), n° 3 Déterminer le nombre de combinaisons de *n* éléments différents pris *r* à la fois pour résoudre des problèmes. [C, R, RP, V] Mathématiques 30-2, Raisonnement logique, n° 1 Analyser des casse-tête et des jeux comportant le raisonnement numérique et logique à l'aide de stratégies de résolution de problèmes. [CE, L, R, RP] Mathématiques 30-2, Raisonnement logique, n° 2 Résoudre des problèmes comportant des applications de la théorie des ensembles. [L, R, RP, V] Mathématiques 30-2, Raisonnement logique, n° 6 Résoudre des problèmes comportant des combinaisons. [CE, R, RP, T, V]
Description	Les élèves étudient un casse-tête de nombres premiers et composés qui a de multiples solutions. En utilisant la combinatoire, les élèves déterminent le nombre de solutions possibles au casse-tête.
Matériel	• Photocopies de la fiche reproductible : « Casse-tête de nombres premiers et composés » • Tableau blanc • Crayons feutres pour tableau blanc

Activité

Avant :

1. Amorcez une discussion sur les différentes façons dont on peut classifier les nombres. Par exemple : nombres pairs et impairs, nombres premiers, nombres triangulaires.

2. Posez les questions de récapitulation suivantes :
   - *Est-ce que le nombre 2 est aussi un multiple de 2?*
   - *Est-ce que 1 est un nombre premier?*
   - *Est-ce qu'il existe un nombre triangulaire inférieur à 100 qui est aussi un nombre carré?*

3. Demandez aux élèves de faire le casse-tête avec les connaissances qu'ils ont sur la classification des nombres.

4. Les élèves devraient travailler en groupes de deux ou trois. Distribuez la fiche reproductible : « Casse-tête de nombres premiers et composés » avec les consignes suivantes :
   - *Découpez les cartes de titre et placez-les dans les espaces sur le plateau de jeu.*
   - *Découpez les 25 cartes de nombre et placez-les dans les carrés du plateau de jeu de sorte que leur nombre corresponde aux conditions énoncées sur les cartes de titre de la rangée et de la colonne en question.*
   - *Réorganisez les cartes de titre sur le plateau et essayez de nouveau d'en remplir tous les carrés.*

5. Une fois que les élèves ont décidé comment ils veulent arranger les cartes de titre, demandez-leur de dessiner la configuration de leur casse-tête au tableau. Le but de cette activité est de trouver le plus de configurations du casse-tête possible.

Pendant :

1. Posez les questions suivantes aux élèves :
   - *Est-ce qu'il y a, parmi les configurations du casse-tête au tableau, des configurations équivalentes?*
   - *Qu'est-ce qui les rend équivalentes?*
   - *Qu'est-ce qui fait que deux configurations du casse-tête sont distinctes?*

Remarque.– Dans le cours Mathématiques 30-2, les réponses des élèves devraient comprendre les concepts qu'ils ont étudiés dans leur étude des ensembles, notamment l'intersection de deux ensembles, les ensembles disjoints et l'ensemble vide. Ce résultat d'apprentissage ne compte pas parmi ceux du cours Mathématiques 30-1 alors dans ce cours-ci, vous pouvez vous attendre à un raisonnement plus général qui n'inclut pas les concepts des ensembles.

2. Les élèves devraient continuer à travailler en groupes de deux ou trois. Donnez-leur la tâche suivante :
   - Trouver le nombre de configurations distinctes du casse-tête qui pourraient possiblement avoir une solution.

3. Quand ils ont terminé, les élèves écrivent leur réponse au tableau.

Après :

1. Les élèves doivent défendre leur réponse. Pour ce faire, ils pourront faire un raisonnement algébrique ou schématique, ou encore raisonner par essais et erreurs.

2. La classe devrait arriver à un consensus concernant le nombre de configurations du casse-tête. Les élèves peuvent négocier, débattre ou combiner leurs idées afin de trouver une solution finale.

Informations pour l'enseignant

1. Il se peut que les élèves aient fait cette activité dans leur cours Mathématiques 10C où l'accent était placé sur la classification des nombres et la résolution du casse-tête. Pour l'activité destinée à ce cours de dixième année, veuillez voir l'activité « Casse-tête de nombres premiers et composés ».

2. Cette activité regroupe les concepts des ensembles et de la combinatoire. Son but est que élèves déterminent le nombre de combinaisons de casse-tête pouvant mener à une solution. Il y a plusieurs différentes façons de raisonner pour résoudre ce problème; en voici une :

   Puisqu'il n'y a aucun élément à l'intersection des nombres pairs et les nombres impairs, ces deux cartes seront regroupées ensemble. Le même raisonnement s'applique aux cartes représentant les nombres supérieurs à 20 et les nombres inférieurs à 20, ainsi que les nombres premiers et les nombre carrés (puisque 1 n'est pas un nombre premier). Il y a donc 4 cartes simples et 3 groupes de 2 cartes que l'on peut utiliser afin de former des combinaisons de casse-tête.

   Nous allons utiliser le diagramme suivant afin de simplifier la solution :

A					
A					
B					
B					
D					
	C	C	E	F	G

où : A, A, B, B, D sont dans la position verticale
C, C, E, F, G sont dans la position horizontale
et : les lettres A et A représentent les nombres pairs et les nombres impairs;
les lettres B et B représentent les nombres supérieurs à 20 et les nombres inférieurs à 20 et
les lettres C et C représentent les nombres premiers et les nombres carrés.

Il y a donc trois combinaisons possibles ($_3C_2$) pour les cartes doubles en position verticale :

- AA avec BB;
- BB avec CC et
- AA avec CC.

B					
B					
C					
C					
G					
	A	A	D	E	F

seraient parmi les combinaisons possibles.
Les configurations seront formées par l'échange des cartes simples dans la seule position verticale vide. Puisqu'il ne reste qu'une place vide, le nombre de combinaisons égale $_4C_1$.

La somme du nombre de combinaisons de cartes doubles et du nombre de combinaisons de cartes simples est le nombre de solutions possibles au problème.

Donc :

$$_3C_2 + {}_4C_1 = 12 \text{ configurations possibles}$$

Il est à noter que la position (horizontale ou verticale) n'est pas importante dans le contexte de ce problème puisque c'est l'intersection des deux éléments (là où l'on place la carte comportant le nombre) qui compte. La configuration présentant AA et BB dans la position verticale avec D serait équivalente au cas présentant CC avec E, F, et G dans la position verticale puisque, par défaut, AABBD sont dans la position horizontale, créant les mêmes intersections des ensembles de nombres.

Il est aussi important de noter que dans une seule configuration du casse-tête, il peut exister plusieurs solutions, ou aucune solution. Trouver le nombre de solutions qui fonctionnent pour le casse-tête dépasse les attentes associées à cette activité.

Extension

Pour s'offrir un plus grand défi, l'élève pourrait trouver le nombre de configurations du casse-tête qui donnent des solutions impossibles à cause des nombres qui doivent être placés dans les carrés du plateau de jeu (p. ex., l'intersection de deux ensembles de nombres forme un ensemble vide non parce qu'il n'existe pas un nombre dans son intersection mais parce qu'il n'y a pas un nombre donné qui se situe à leur intersection).

Il pourrait donc, trouver non seulement le nombre de configurations possibles du casse-tête mais le nombre de vraies solutions au casse tête.

Voici un exemple de casse tête qui n’a pas de solution :

Exemple de configuration sans solution

NOMBRES PAIRS	24	18	30	20	12
NOMBRES IMPAIRS		7	45	35	15
NOMBRES PREMIERS	23	11	3	5	2
NOMBRES CARRÉS	36	16	9	25	4
NOMBRES TRIANGULAIRES	55	6	21	10	1
	NOMBRES SUPÉRIEURS À 20	NOMBRES INFÉRIEURS À 20	MULTIPLES DE 3	MULTIPLES DE 5	FACTEURS DE 60

* La carte 60 est impossible à placer parce qu'il reste juste de la place pour des nombres impairs et 60 est un nombre pair. Les cartes qui pourront être échangés avec 60 sont aussi des nombres pairs. Il n'y a donc, pas de solution.

Fiche reproductible

Casse-tête de nombres premiers et composés (Grille)

Source : © 2011.*The Factors and Multiples Puzzle.* NRICH http://nrich.maths.org. University of Cambridge, U.K. Tous droits réservés.

Casse-tête de nombres premiers et composés (Cartes)

1	2	3	4	5
6	7	9	10	11
12	15	16	18	20
21	23	24	25	30
35	36	45	55	60

NOMBRES PREMIERS	NOMBRES TRIANGULAIRES
NOMBRES CARRÉS	FACTEURS DE 60
NOMBRES INFÉRIEURS À 20	MULTIPLES DE 3
NOMBRES SUPÉRIEURS À 20	MULTIPLES DE 5

Source : © 2011.*The Factors and Multiples Puzzle.* NRICH http://nrich.maths.org. University of Cambridge, U.K. Tous droits réservés.

Casse-tête de nombres premiers et composés

(Feuille de réponses nº 1)

NOMBRES TRIANGULAIRES	3	36	6	55	15
NOMBRES SUPÉRIEURS À 20	23	25	21	30	60
NOMBRES INFÉRIEURS À 20	7	9	18	10	12
NOMBRES PAIRS	2	16	24	20	4
NOMBRES IMPAIRS	11	1	45	35	5
	NOMBRES PREMIERS	NOMBRES CARRÉS	MULTIPLES DE 3	MULTIPLES DE 5	FACTEURS DE 60

Casse-tête de nombres premiers et composés

(Feuille de réponses n° 2)

NOMBRES PAIRS	2	36	6	24	10
NOMBRES IMPAIRS	7	9	55	21	35
NOMBRES SUPÉRIEURS À 20	23	25	45	60	30
NOMBRES INFÉRIEURS À 20	11	16	1	18	5
FACTEURS DE 60	3	4	15	12	20

NOMBRES PREMIERS	NOMBRES CARRÉS	NOMBRES TRIANGULAIRES	MULTIPLES DE 3	MULTIPLES DE 5